① 期待効用$E[\,U(X)\,]$： 効用の期待値。

a. 離散変量のとき

$$E[\,U(X)\,] = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i) = p_1 U(x_1) + p_2 U(x_2) + \cdots + p_n U(x_n) \qquad 1.14$$

b. 連続変量のとき

$$E[\,U(X)\,] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x) dx \qquad 1.15$$

② 確実同値x_c： リスク資産に対する期待効用と等価な効用をもたらす確実な資産額。

$E[\,U(X)\,] = U(x_c)$ を満たすようなx_c 1.16

③ リスクプレミアムρ： 「期待資産額」－「確実同値額」。リスクある期待資産額を確実なものにするために追加的に支払ってもよいと考える金額。

$$\rho = E[X] - x_c \qquad 1.17$$

④ 投資家の行動

期待効用が最も大きな投資を選択する(期待効用最大化原理)。

⇔ 確実同値額が最も大きな投資を選択する。

(5) 期待値と分散で表現される期待効用

資産額Xの期待値をm，分散をσ^2とし，効用関数を$U(x)$とする。$U(x)$をmのまわりで Taylor 展開すると(整級数で近似すると)，次のようになる。

$$U(x) = U(m) + U'(m)(x-m) + \frac{1}{2}U''(m)(x-m)^2 + R \qquad 1.18$$

ただし，

$$R = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(m)(x-m)^n \qquad 1.19$$

ここで，Rは微小であるとみなして無視し(1.18)式の両辺の期待値をとると，期待効用が次のように表される。

$$E[\,U(X)\,] = U(m) + \frac{1}{2}U''(m)Var(x) \qquad 1.20$$

ここから次のことがわかる。

① 期待効用は，資産額の期待値(平均)mと分散$Var(x)$の関数として表すことができる。

② 期待効用は，資産額の期待値(平均)mが大きいほど大きい。

③ 期待効用は，投資家が危険回避型であるならば($U''(m) < 0$)，分散$Var(x)$が小さいほど大きい。

改めて，期待効用$E[\,U(X)\,]$を，資産額Xの期待値mと分散σ^2の関数として$u(m,\sigma)$と表すことにすると(1.20)式は次のように書き換えられる。

$$E[\,U(X)\,] = u(m,\sigma) = U(m) + \frac{1}{2}U''(m)\sigma^2 \qquad 1.21$$

(6)　Arrow-Plattの絶対危険回避度

次の指標をArrow-Plattの絶対危険回避度λという。

$$\lambda = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \tag{1.22}$$

$U''(x) < 0$なら危険回避型，$U''(x) = 0$なら危険中立，$U''(x) > 0$なら危険愛好型であるから，λはその符号を変えたものになる。$U'(x) > 0$で割るのは基準化のためである。改めて言い換えると次のようになる。

$\lambda > 0 \implies$ 危険回避型(λが大きいほど回避の度合いが強い)
$\lambda = 0 \implies$ 危険中立型
$\lambda < 0 \implies$ 危険愛好型(λの絶対値が大きいほど愛好の度合いが強い)

絶対危険回避度λを用いて，期待効用関数(1.21)式を書き直すと次のようになる。

$$E[\,U(X)\,] = u(m,\sigma) = U(m) - \frac{1}{2}\lambda U'(m)\sigma^2 \tag{1.23}$$

(7)　危険回避型の効用関数のタイプと期待効用関数の形状

① 2次関数タイプ
効用関数

$$U(X) = -ax^2 + x \qquad (0 < a,\quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2a}\ ) \tag{1.24}$$

期待効用

$$u(m,\sigma) = -am^2 + m - a\sigma^2 \tag{1.25}$$

絶対危険回避度

$$\lambda = \frac{2a}{-2ax+1} > 0 \tag{1.26}$$

② 対数関数タイプ
効用関数

$$U(X) = alog(x+1) \qquad (0 < a,\quad 0 \leqq x\ ) \tag{1.27}$$

期待効用

$$u(m,\sigma) = \mathrm{a}\log(m+1) - \frac{a}{2(m+1)^2}\sigma^2 \tag{1.28}$$

絶対危険回避度

$$\lambda = \frac{1}{x+1} > 0 \tag{1.29}$$

③ 指数関数タイプ
効用関数

$$U(X) = 1 - e^{-ax} \qquad (0 < a, \quad 0 \leqq x\ ) \tag{1.30}$$

期待効用

$$u(m,\sigma) = 1 - e^{-am} - \frac{1}{2}a^2 e^{-am}\sigma^2 \tag{1.31}$$

絶対危険回避度

$$\lambda = a > 0 \tag{1.32}$$

④ 累乗関数(べき関数)タイプ

効用関数

$$U(X) = x^a \qquad (0 < a < 1, \quad 0 \leqq x\ ) \tag{1.33}$$

期待効用

$$u(m,\sigma) = m^a - \frac{1}{2}a(1-a)m^{a-2}\sigma^2 \tag{1.34}$$

絶対危険回避度

$$\lambda = \frac{1-a}{x} > 0 \tag{1.35}$$

⑤ その他 (証券アナリスト 2 次対策総まとめテキスト証券分析，TAC，2011 年，p.240)

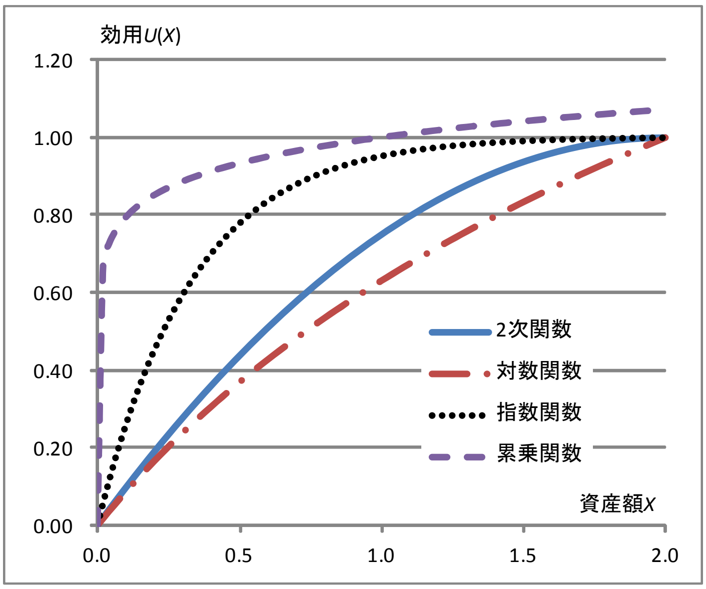
期待効用

$$u(m,\sigma) = m - \frac{1}{2\tau}\sigma^2 \tag{1.36}$$

(注 1)　τは危険許容度$= 1/\lambda$。

(注 2)　この式はよく用いられるとされるが，もとの効用関数は不明である。そもそも効用関数の形状は正確には計測できないので，こうした単純化したものが近似式として用いられるのかもしれない。

図 1.1　効用関数のタイプ別の形状



(8)　無差別曲線と投資決定

株式 A，株式 B，株式 C のそれぞれの収益率の期待値(平均)mと標準偏差σが下図 1.2 のようになっている。また投資家の期待効用が，mとσの関数として

$$u(m, \sigma) = m - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2 \qquad 1.37$$

と表される。λは絶対危険回避度である。mが大きいほど期待効用は大きい。σが小さいほど期待効用は大きい。

ここで$u(m, \sigma) = u_1$ (定数)となるようなmとσとの関係を表す曲線を無差別曲線という。これは，同一の効用を達成するmとσとの組み合わせを表している。次の式で表される。

$$m = \frac{1}{2}\lambda\sigma^2 + u_1 \qquad 1.38$$

効用水準u_1の値を変えて図にすると下図のようになる。左上ほど効用が大きい。投資家はこれをもとに期待効用が最も大きい投資先を決定すると考えられる。

図 1.2　無差別曲線と投資の決定